Νικόλαος Σαμπάνης

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΓΙΑ ΦΟΙΤΗΤΕΣ

- Θεωρία – συνοπτικές σημειώσεις
- Λυμένα παραδείγματα
- Ασκήσεις
- Οπτικοποίηση Mathematica

www.askisopolis.gr

2023

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διαφορικές εξισώσεις είναι τα πιο ισχυρά εργαλεία που διαθέτουμε για να αναλύουμε τον κόσμο που μας περιβάλει με Μαθηματικά. Χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση θεμελιωδών νόμων της φύσης (από τους νόμους του Νεύτωνα έως τις εξισώσεις του Maxwell και τους νόμους της κβαντομηχανικής) και των φαινομένων που συμβαίνουν σε αυτή.

Οι διαφορικές εξισώσεις ήρθαν στην επιφάνεια λόγω της εφεύρεσης του λογισμού από τους Νεύτωνα και Leibniz

Οι περισσότεροι είμαστε εξοικειωμένοι με την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων. Θεωρήστε την εξίσωση $x^2+x=0$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι έχει λύσεις $x=0$ ή $x=-1$. Αυτοί οι αριθμοί επαληθεύουν την εξίσωση και λέγονται ρίζες ή λύσεις της εξίσωσης.

Η διαφορά των διαφορικών εξισώσεων με τις συνήθεις αλγεβρικές εξισώσεις που οι περισσότεροι γνωρίζουν είναι ότι ο άγνωστος είναι συνάρτηση και όχι αριθμός και περιέχει παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης που αναζητούμε ως λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Μια διαφορική εξίσωση (ΔΕ) συνδέει μια άγνωστη συνάρτηση με κάποιες από τις παραγώγους της .

Η πιο απλή και κατανοητή διαφορική εξίσωση , ακόμα και από μαθητές λυκείου είναι η

$$y'(x)=y(x) \quad (1)$$

η οποία χάριν συντομίας θα γράφεται $y'=y$, της οποίας μία λύση είναι η συνάρτηση $y(x)=e^x$, διότι $y'(x)=\left(e^x\right)'=e^x=y(x)$.

Είναι η λύση μοναδική ; Προφανώς και όχι . Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $y(x)=ce^x$, για αυθαίρετη τυχαία σταθερά $c\in\mathbb{R}$, τότε $y'(x)=\left(ce^x\right)'=ce^x=y(x)$.

Άρα η ΔΕ (1) έχει άπειρες λύσεις.

Οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων αναπαρίστανται με την χρήση λογισμικού όπως τα Μαθηματικά πακέτα Mathematica και Matlab τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για την βέλτιστη κατανόηση του μαθήματος των διαφορικών εξισώσεων .

1.1 Ορισμοί

Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ) είναι μία εξίσωση που περιέχει μία άγνωστη συνάρτηση και μία ή περισσότερες παραγώγους της. Είναι μία εξίσωση της μορφής :

$$F(x,y,y',y'',....)=0$$

Όπου y είναι μία **συνάρτηση** του x.

Παράδειγμα 1 $y'=y$, $y''=x^2$, $(y')^2-xy=2\ln x$

Τάξη μιας (ΣΔΕ) είναι **η τάξη** της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Ειδική λύση μιας ΣΔΕ λέγεται μία συνάρτηση $y=f(x)$ που ικανοποιεί την εξίσωση αυτή. Το σύνολο των ειδικών λύσεων μιας ΣΔΕ λέγεται **γενική λύση.**

Παράδειγμα 2 Δίνεται η ΔΕ $y'=2x$

Η ΔΕ $y'=3x$ είναι πρώτης τάξης και μία ειδική λύση της είναι η συνάρτηση

$y(x)=x^2+1$, διότι $y'(x)=\left(x^2+1\right)'=2x$ ενώ η γενική της λύση είναι η

$y(x)=x^2+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$ αυθαίρετη τυχαία σταθερά.

Η διαδικασία επίλυσης βασίζεται στο αόριστο ολοκλήρωμα και έχει ως εξής:

$$y'=2x\Rightarrow\int y'dx=\int 2xdx\Rightarrow y=x^2+c$$

Παράδειγμα 3 Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση $y'=1-6e^{2x}$

i. Να βρείτε την γενική λύση.

ii. Να βρείτε την λύση η οποία ικανοποιεί την συνθήκη $y(0)=5$

Λύση

i. Χρησιμοποιώντας αντιπαραγώγιση (αόριστο ολοκλήρωμα) έχουμε :
$y'=1-6e^{2x}\Rightarrow\int y'dx=\int\left(1-6e^{2x}\right)dx\Rightarrow y(x)=x-3e^{2x}+c$

ii. Για να ικανοποιείται η συνθήκη $y(0)=5$ έχουμε $0-3e^{2\cdot 0}+c=5\Rightarrow c=8$. Άρα η συνάρτηση $y(x)=x-3e^{2x}+8$ είναι λύση της ΔΕ που ικανοποιεί την συνθήκη.

Το παράδειγμα 3 αναφέρεται και ως Πρόβλημα Αρχικής Τιμής (Π.Α.Τ) ή Πρόβλημα Αρχικών Τιμών όπως ορίζεται στην συνέχεια.

1.2 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Η γενική μορφή μιας ΣΔΕ πρώτης τάξης μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$y' = F(x,y) \text{ ή } F(x,y,y') = 0 \quad (2)$$

Αν γνωρίζουμε την γενική λύση της (2) και θέλουμε να βρούμε μία ειδική λύση θα πρέπει να γνωρίζουμε την τιμής της άγνωστης συνάρτησης y σε ένα σημείο (x_0, y_0), δηλαδή $y(x_0) = y_0$

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ) ονομάζεται η διαφορική εξίσωση μαζί με μία αρχική συνθήκη. Άρα η μορφή ενός Π.Α.Τ για διαφορικές πρώτης τάξης θα είναι :

$$y' = f(x,y) \; , \; y(x_0) = y_0$$

Παράδειγμα 4 Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών :

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 1$$

Λύση

$y' = 3x^2 \Rightarrow \int y' dx = \int 3x^2 dx \Rightarrow y(x) = x^3 + c$. Για $x = 0$ έχουμε $y(0) = 0^3 + c \Rightarrow 1 = c$

Άρα το ΠΑΤ έχει λύση $y(x) = x^3 + 1$.

1.2.1 Εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Μια ΣΔΕ πρώτης τάξης ονομάζεται χωριζόμενων μεταβλητών αν το δεύτερο μέλος της αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων όπου ο ένας είναι συνάρτηση μόνο του x (ή όποιας ανεξάρτητης μεταβλητής της συνάρτησης της λύσης) και ο άλλος μόνο του y (δηλαδή της συνάρτησης της λύσης) .

Η εξίσωση **χωριζόμενων μεταβλητών** είναι της μορφής :

$$y' = f(x)g(y) \text{ ή } \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (3)$$

Για να λυθεί θα γραφτεί στην μορφή $G(y)dy = f(x)dx$ και στην συνέχεια ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της με την προϋπόθεση ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα αυτά σύμφωνα με τους βασικούς τύπους αόριστων ολοκληρωμάτων.

Οι εξισώσεις $\frac{dy}{dx} = y\sin x, \frac{dy}{dx} = x + xy$ είναι χωριζόμενων μεταβλητών ενώ η

$\frac{dy}{dx} = x + y$ δεν είναι επειδή x+y δεν είναι γινόμενο της μορφής $f(x)g(y)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Α. Όταν δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς y , τότε λέμε ότι η λύση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή.
Β. Αν πρέπει να διαιρέσουμε με y, τότε πρέπει να υποθέσουμε πως $y \neq 0$. Αν στην γενική λύση δεν συμπεριλαμβάνεται μία προφανής λύση $y = 0$ τότε λέμε ότι η $y = 0$ είναι μία προφανής ή ιδιάζουσα λύση.

Παράδειγμα 5 Να λυθεί η ΣΔΕ $y' = \frac{x^2}{y^2}$.

Λύση

$y' = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow y^2dy = x^2dx \Rightarrow \int y^2dy = \int x^2dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$. Άρα για $C = 3c$ έχουμε ότι $y^3 = x^3 + C \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C}$

Παράδειγμα 6 Να λυθεί το ΠΑΤ $y' = 6xy^2$, $y(0) = -1$.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι η $y(x) = 0$ είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι $y \neq 0$ και χρησιμοποιώντας διαχωρισμό των μεταβλητών έχουμε:

$y' = 6xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6xy^2 \Rightarrow y^{-2}dy = 6xdx \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int 6xdx \Rightarrow -y^{-1} = 3x^2 + c$. Άρα :

$y = -\frac{1}{3x^2 + c}$. Άρα η γενική λύση της $y' = 6xy^2$, αποτελείται από τις συναρτήσεις $y(x) = 0$ και $y = -\frac{1}{3x^2 + c}$. Για $x = 0$, προκύπτει $c = 1$. Άρα η μερική ή ειδική λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι η $y = -\frac{1}{3x^2 + 1}$

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το ΠΑΤ $y'+3x^2y^2=0$, $y(1)=\frac{1}{2}$. [**Απ**: $y(x)=\frac{1}{x^3+1}$]

2. Να λυθεί το ΠΑΤ $y'=\frac{x+1}{2y}$, $y(0)=1$. [**Απ**: $y(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+x+1}$]

3. Να λυθεί το ΠΑΤ $e^y y'-\left(x+x^3\right)=0$, $y(0)=1$. [**Απ**: $y(x)=\ln(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+e)$]

4. Δείξτε ότι αν c_1,c_2 σταθερές τότε η $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+2x-4$ είναι λύση της ΔΕ $y''+2y'+y=2x$ στο $\left(-\infty,+\infty\right)$

5. Δείξτε ότι η $y=\frac{x^2}{3}+\frac{1}{x}$ είναι λύση της ΔΕ $xy'+y=x^2$ στο $\left(0,+\infty\right)$ και $\left(-\infty,0\right)$.

6. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'=\frac{ty(4-y)}{1+t}$, $y(0)=1$

(i) Να βρεθεί η λύση του.

(ii) Να μελετηθεί η συμπεριφορά της λύσης όταν $t\to+\infty$

7. Να λύσετε τις ακόλουθες ΣΔΕ με την μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών :

(i) $y'=ye^{-x}$

(ii) $y'=\frac{2y}{x+1}$

(iii) $y'=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\cos y}$

(iv) $yy'=\left(y^2+1\right)\left(x^2+1\right)$

(v) $xe^{x+y}=yy'$

8. Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ :

(i) $y'=ye^{-x}$, $y(0)=e$

(ii) $y'=\frac{y^3+2y}{t^2+3t}$, $y(1)=1$

(iii) $y'=\frac{4-2x}{3x^2-5}$, $y(1)=3$